FISICA

MECCANICA:
Principio conservazione energia meccanica

Autore: prof. Pappalardo Vincenzo
docente di Matematica e Fisica

INTRODUZIONE

Nei fenomeni che osserviamo vi sono molte grandezze che cambiano nel tempo, come la velocità, la posizione, o le stesse forze. Capire un fenomeno significa saper prevedere, istante per istante, come cambiano alcune grandezze significative. I principi della dinamica servono a fare queste previsioni, purché si abbia un quadro dettagliato delle forze che in ogni istante agiscono sul sistema fisico in esame.

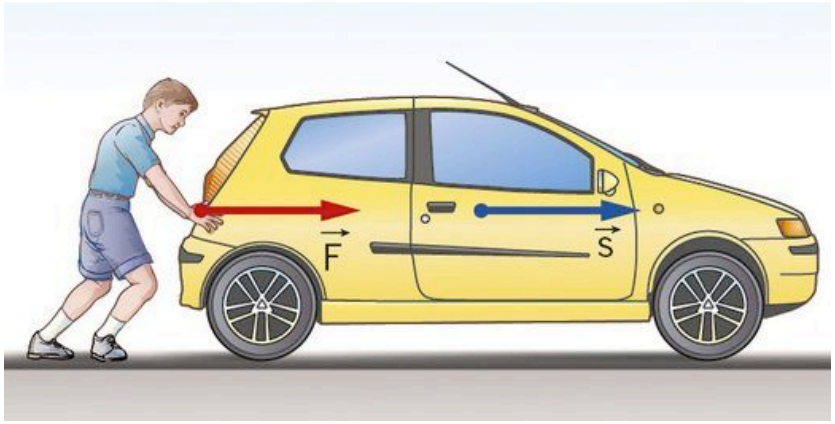
Ovviamente, i problemi possono essere di difficile soluzione quando il sistema è particolarmente complicato da studiare.

Se però cambiamo punto di vista, invece di determinare l'andamento nel tempo di grandezze che variano, possiamo individuare, se esistono, le grandezze che rimangono costanti nel tempo. In altri termini, anziché sulle leggi di variazione ci soffermiamo sulle leggi di conservazione.

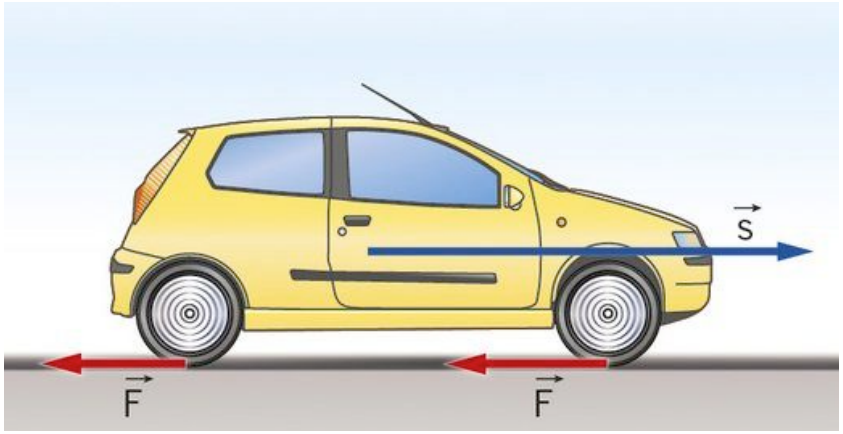
Una legge di conservazione afferma che durante lo svolgimento di un fenomeno qualche grandezza fisica rimane costante.

IL LAVORO

In tutte le macchine vi sono forze che producono spostamenti. Una nuova grandezza, il **lavoro** di una forza, misura l'effetto utile della combinazione di una forza con uno spostamento.



Lavoro motore
(lavoro positivo)

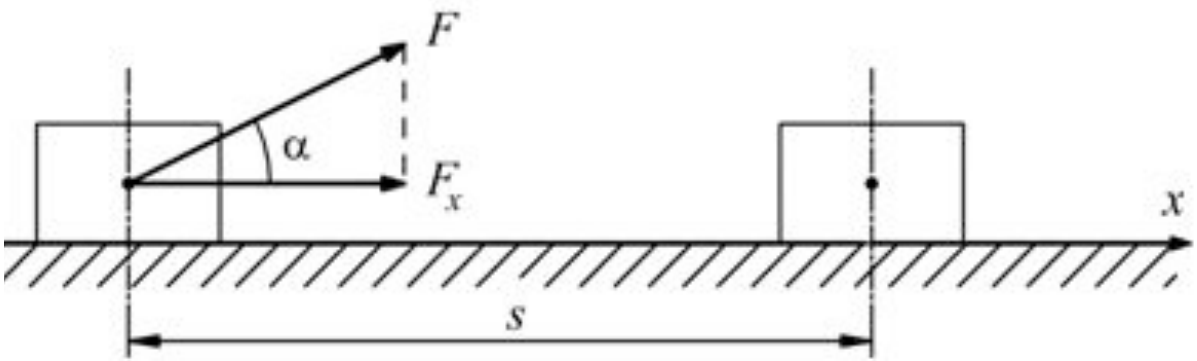


Lavoro resistente
(lavoro negativo)

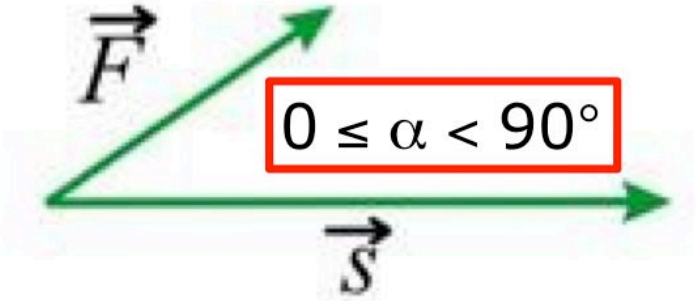
Definizione lavoro

Il lavoro L di una forza costante **F** che provoca uno spostamento **s** è uguale al prodotto scalare tra i vettori **F** ed **s**:

$$L = \vec{F} \bullet \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos\alpha \quad \left[\text{Joule (J)}\right]$$

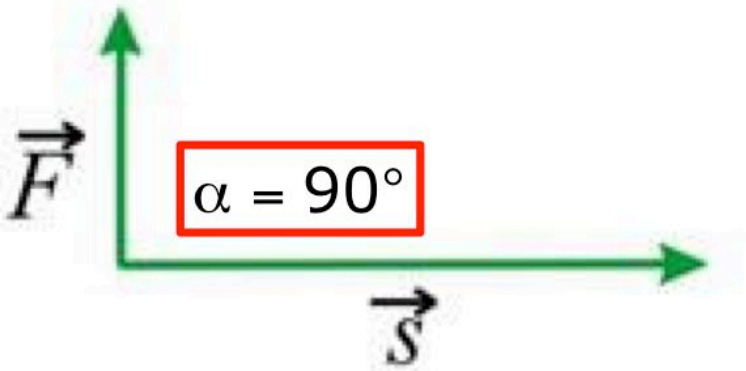


Il lavoro è prodotto dalla forza, o dalla sua componente, che agisce lungo lo spostamento.



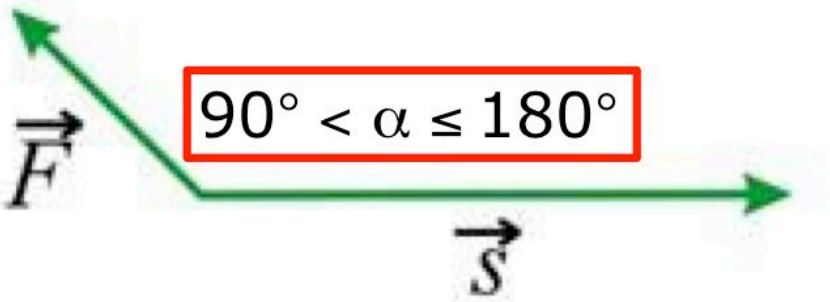
$L > 0$

Lavoro motore



$L = 0$

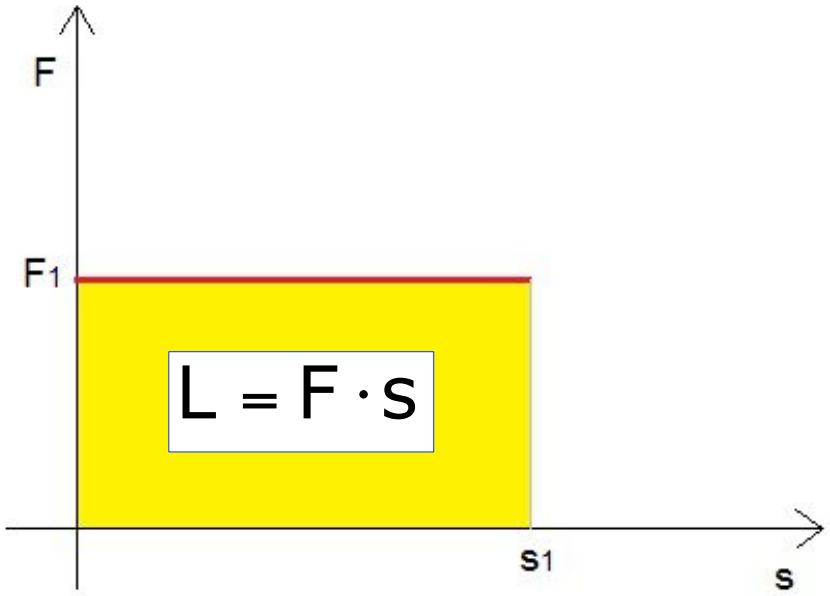
Lavoro nullo



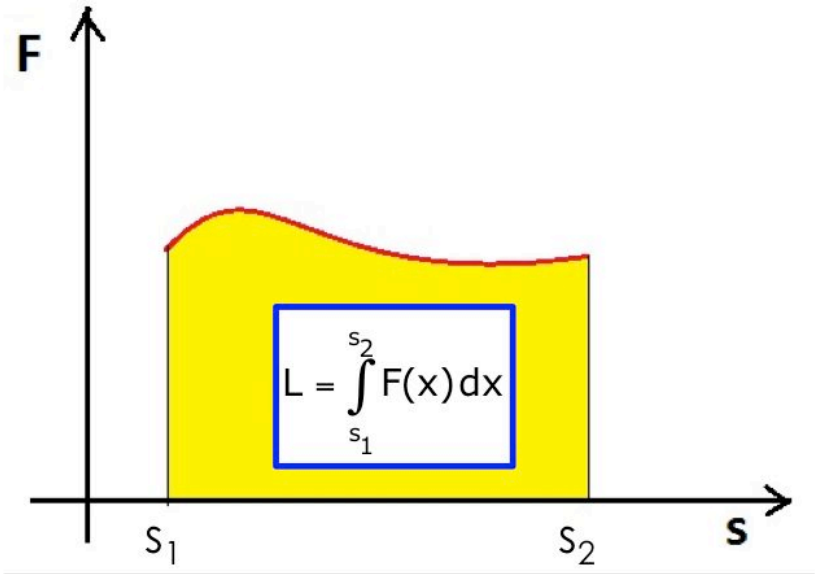
$L < 0$

Lavoro resistente

Se riportiamo su un sistema di assi cartesiani la forza applicata ad un corpo in funzione dello spostamento subito dal corpo stesso, allora il lavoro prodotto è dato dall'area sottesa dal grafico che rappresenta la *funzione forza*.



E' il caso più semplice, ossia il lavoro prodotto da una forza costante. L'area sottesa dalla funzione forza, rappresentata da una retta orizzontale, è data dall'area di un rettangolo.



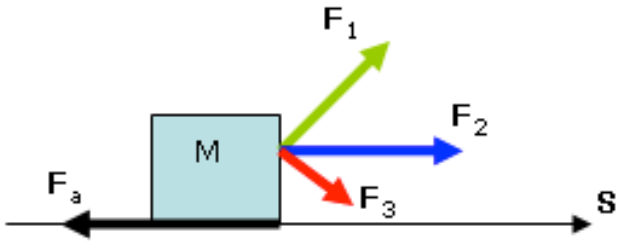
Questo è il caso più generale: il lavoro prodotto da una forza variabile. L'area sottesa dalla funzione forza non ha forma regolare, per cui non possiamo utilizzare nessuna formula della geometria euclidea.

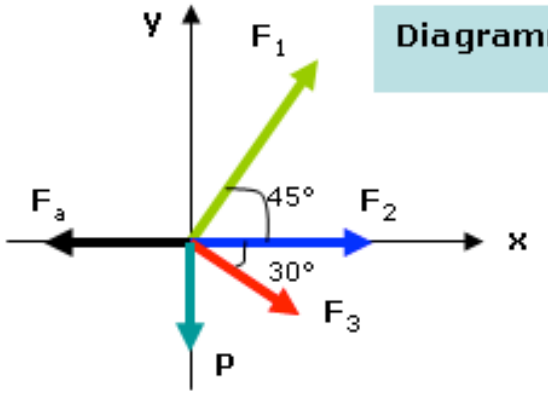
Però ci viene in aiuto l'analisi matematica attraverso uno strumento di calcolo chiamato integrale definito. Il lavoro prodotto da una forza variabile sarà quindi calcolato nel seguente modo:

$$L = \int_{s_1}^{s_2} F(x)\,dx$$

Esempio

Calcolare il lavoro totale prodotto dalle forze F_1=10N F_2=5N F_3=7N F_a=2N (forza di attrito), che agiscono su un corpo M secondo le direzioni indicate in figura, e che lo spostano di 10m.





Calcoliamo il lavoro il prodotto dalle singole forze, lungo lo spostamento, attraverso l'applicazione della definizione:

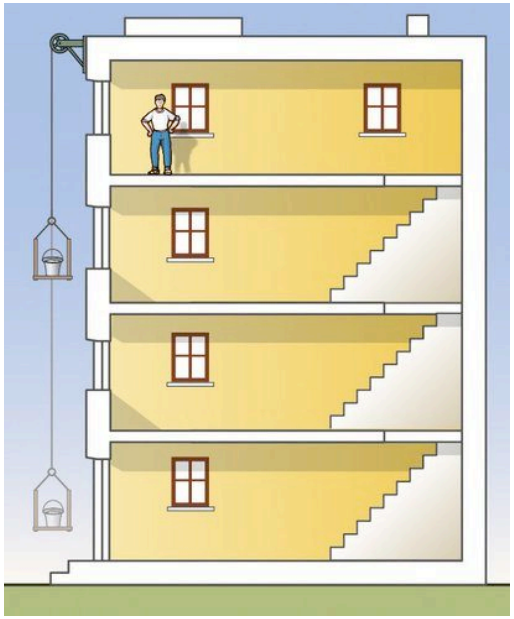
$$L_1 = \vec{F}_1 \bullet \vec{s} = F_1 \cdot s \cdot \cos 45° = 70.7\text{N} \qquad L_2 = \vec{F}_2 \bullet \vec{s} = F_2 \cdot s \cdot \cos 0° = 50\text{N}$$

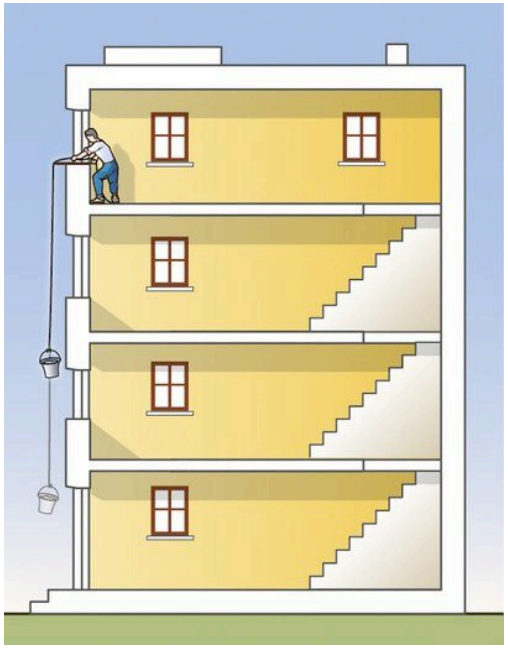
$$L_3 = \vec{F}_3 \bullet \vec{s} = F_3 \cdot s \cdot \cos 30° = 60.6\text{N} \qquad L_a = \vec{F}_a \bullet \vec{s} = F_a \cdot s \cdot \cos 180° = -20\text{N}$$

Il lavoro totale è dato dalla somma algebrica dei singoli lavori:

$$L_T = \sum L_i = L_1 + L_2 + L_3 - L_a = 70,7 + 50 + 60,6 - 20 = 161J$$

LA POTENZA





Il lavoro è lo stesso nelle due situazioni perché:

1. in entrambi i casi viene applicata la stessa forza (quella per vincere il peso del secchio);
2. il secchio compie lo stesso spostamento.

Ma uno stesso lavoro può essere compiuto più o meno rapidamente. Il montacarichi compie lo stesso lavoro più rapidamente.

Per misurare la rapidità con cui una forza compie un lavoro, si introduce la grandezza fisica ***potenza***:

definizione potenza

La potenza di un sistema fisico è uguale al rapporto tra il lavoro compiuto dal sistema e l'intervallo di tempo necessario per eseguirlo:

$$P = \frac{L}{\Delta t} \quad [\text{Watt} : W]$$

Possiamo mettere in relazione la potenza con la velocità media:

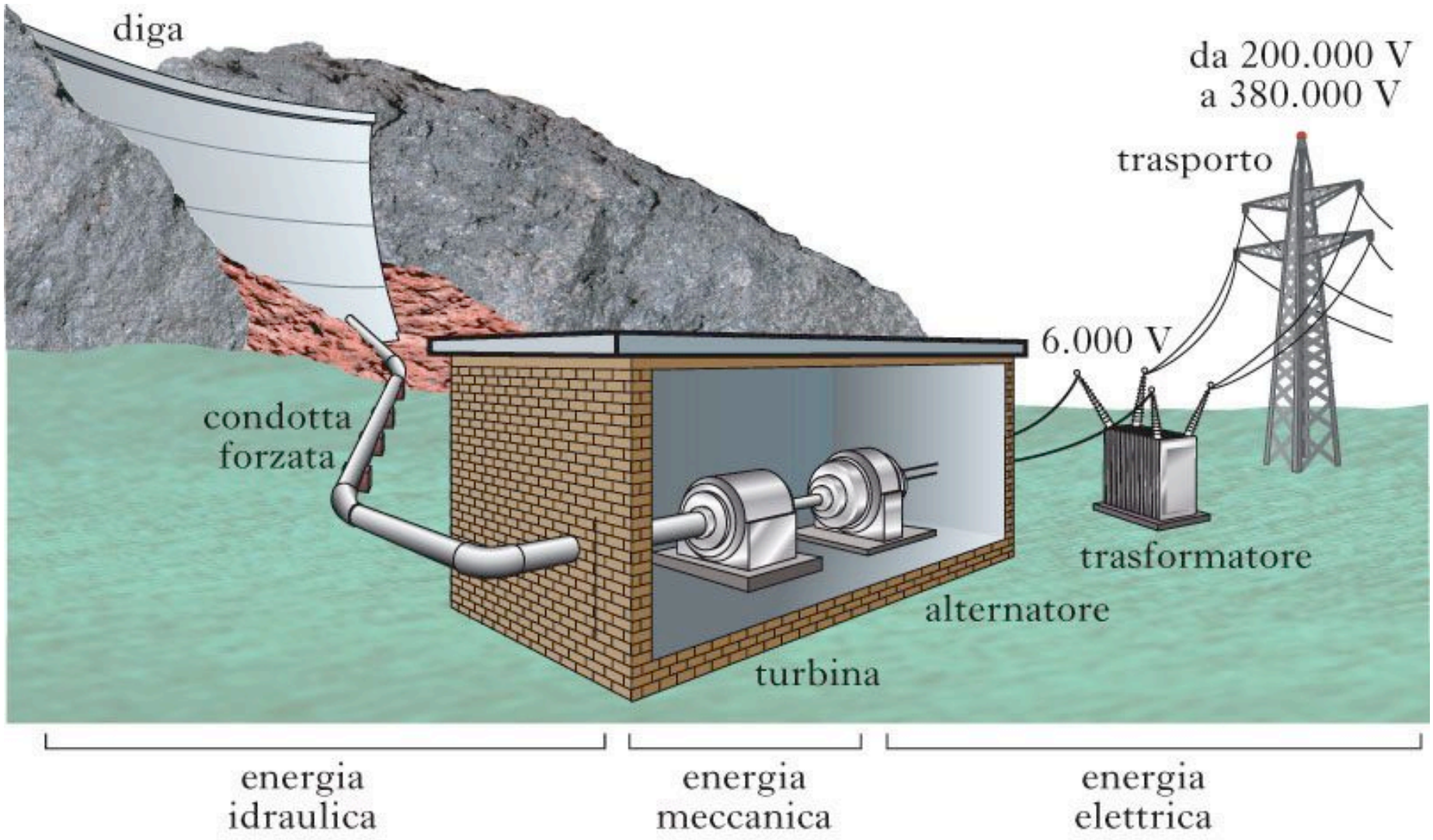
$$P = \frac{L}{\Delta t} = F \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} = F \cdot v_m$$

ENERGIA

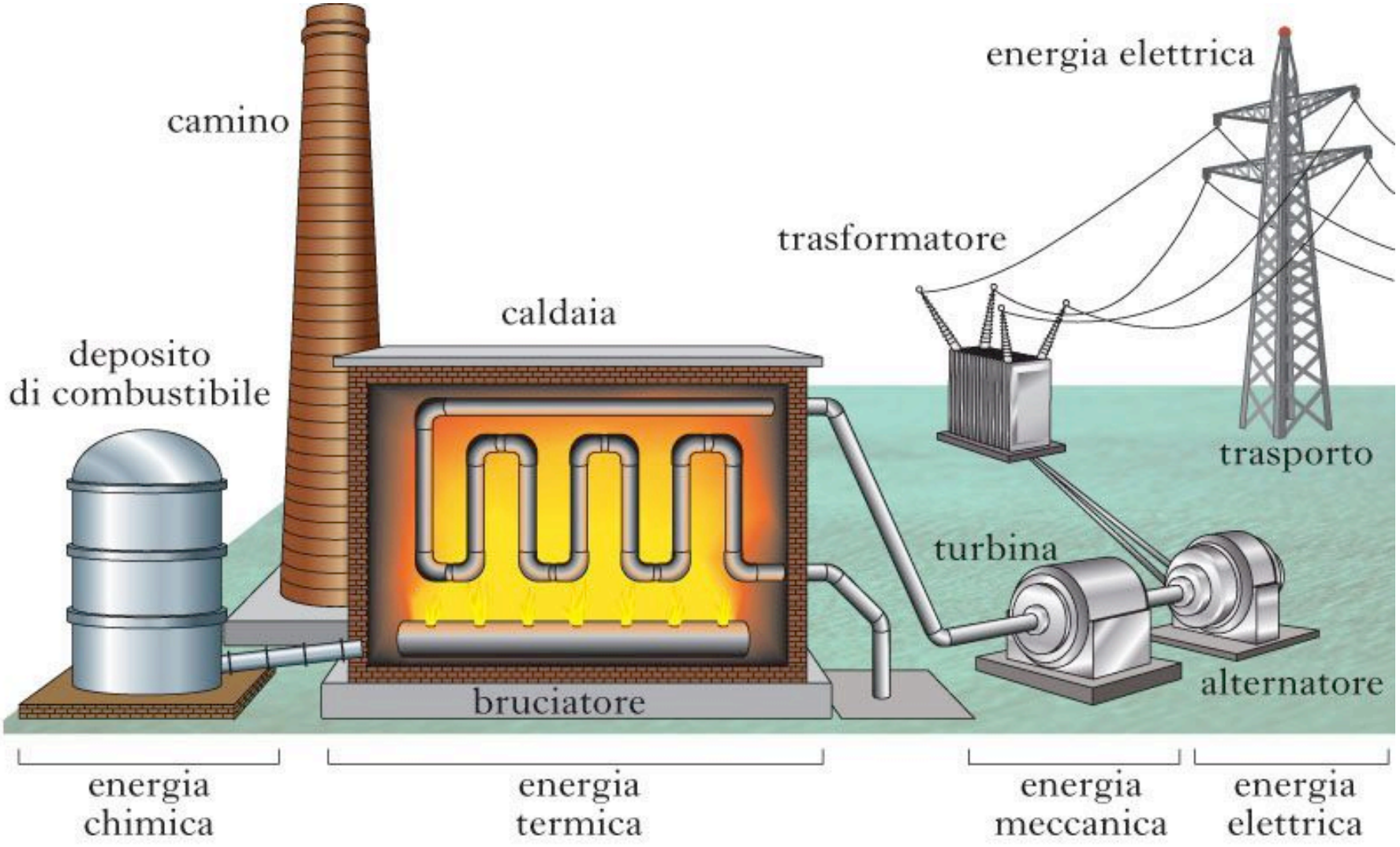
L'energia si presenta in forme diverse (meccanica, termica, elettrica, nucleare, chimica, ecc.) che sono trasformabili l'una nell'altra.

- I combustibili, bruciando, liberano sotto forma di calore l'energia chimica immagazzinata nelle loro molecole;
- Nelle centrali termoelettriche il calore viene trasformato in energia meccanica, che, a sua volta, viene poi convertita in energia elettrica;
- Nelle centrali nucleari l'energia prodotta dalle reazioni nucleari viene convertita in energia elettrica;
- Nelle auto, l'energia termica ricavata dalla combustione della benzina viene convertita in energia meccanica.

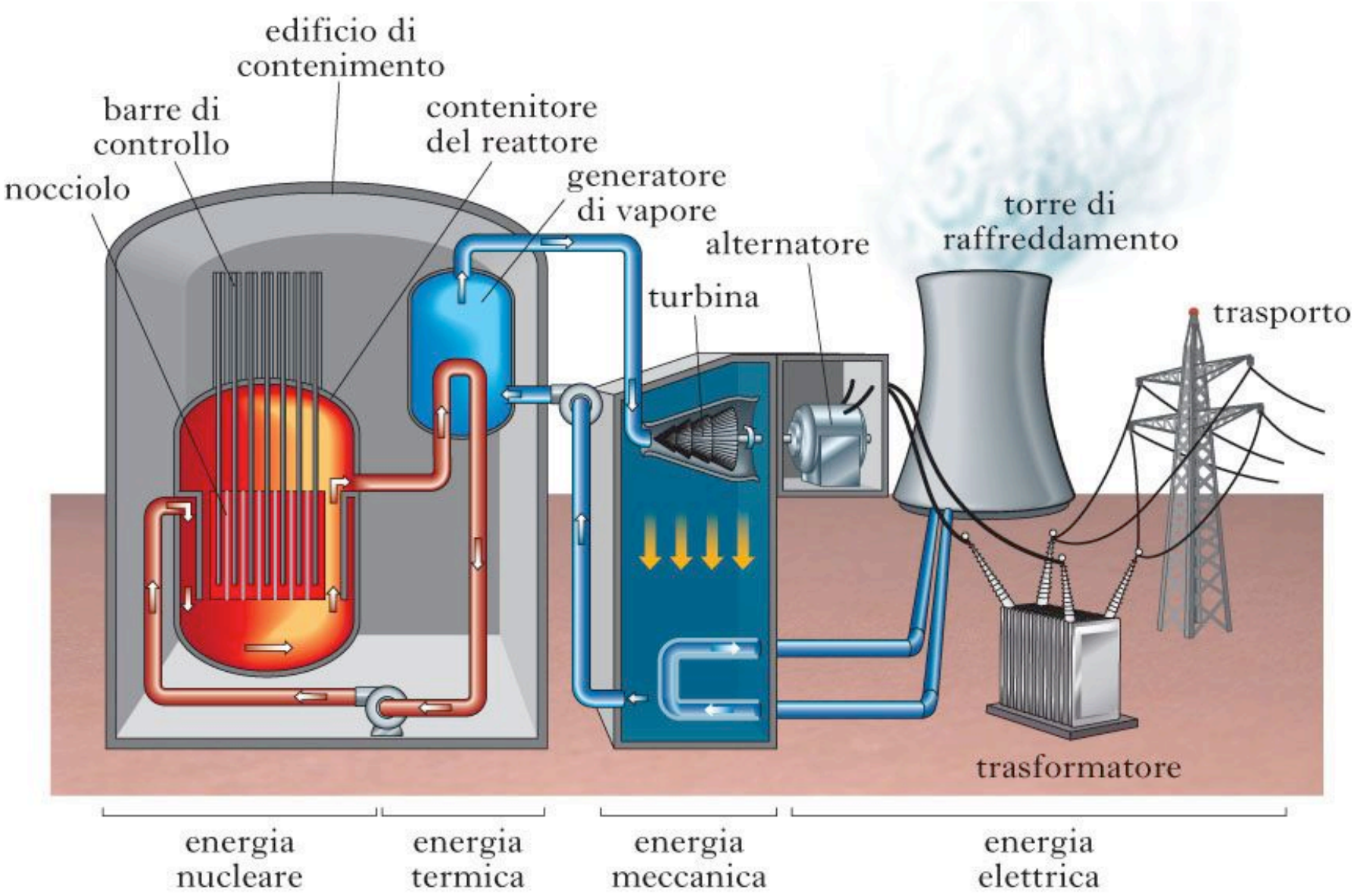
Centrale idroelettrica



Centrale termoelettrica

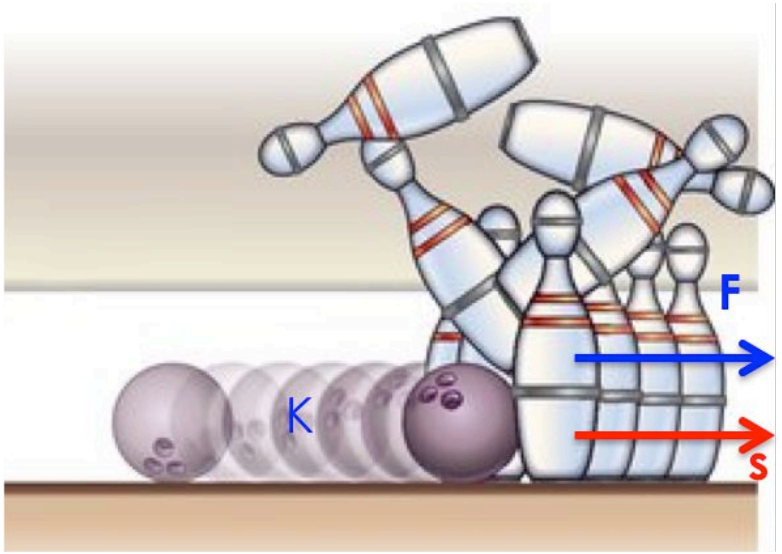


Centrale nucleare

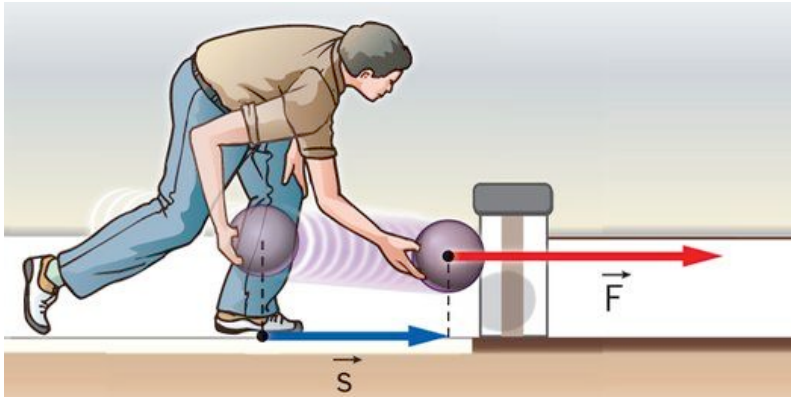


L'energia è definita come la capacità di compiere un lavoro.

Un corpo in movimento può compiere lavoro su un altro corpo perché possiede una forma di energia (cinetica) grazie alla quale questo è possibile.



Viceversa, eseguendo lavoro su un corpo (boccia), si conferisce al corpo energia (cinetica).



ATTENZIONE - Il lavoro di una forza permette di trasformare una parte dell'energia da una forma a un'altra, ma:

Il lavoro non è una forma di energia, ma è energia in transito.

CONSEGUENZA IMPORTANTE

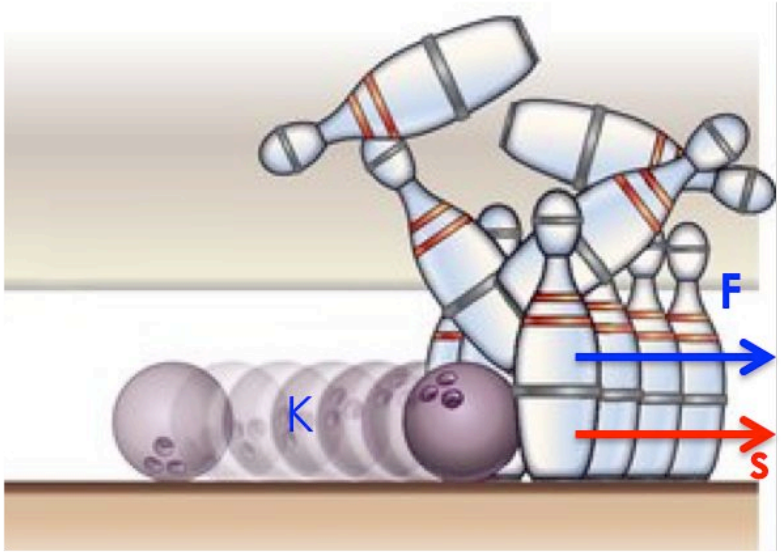
LAVORO ED ENERGIA SONO EQUIVALENTI

In meccanica prenderemo in considerazione due forme di energia:

ENERGIA MECCANICA = ENERGIA CINETICA + ENERGIA POTENZIALE

ENERGIA CINETICA

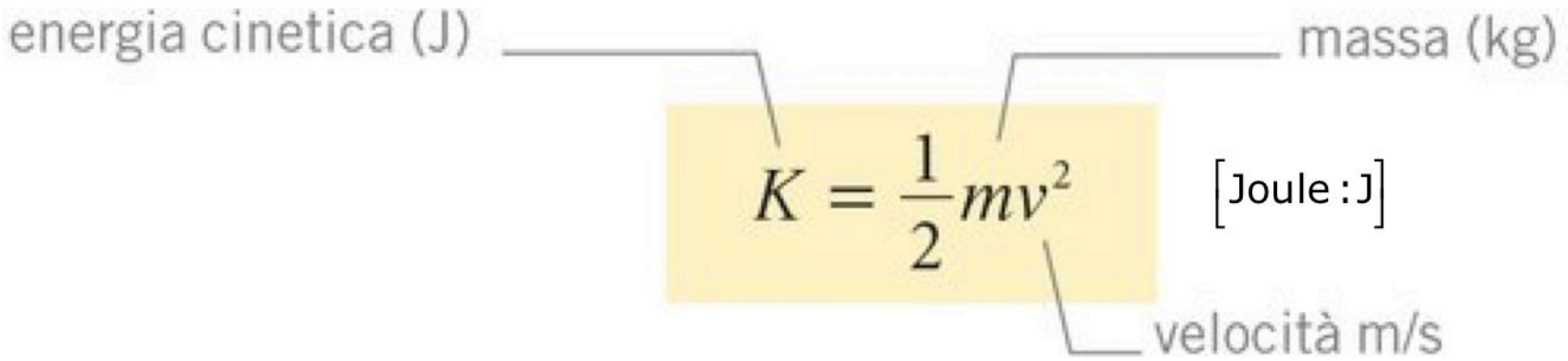
Una boccia da bowling compie un lavoro positivo sui birilli, perché esercita su di essi una forza mentre li sposta.



È evidente che questo lavoro è in qualche modo "trasportato" dalla boccia da bowling che si muove. Per rendere quantitativa questa osservazione, si introduce una nuova grandezza fisica, **l'energia cinetica K.**

Un oggetto in movimento è in grado di compiere lavoro. Questo lavoro avviene a spese di una forma di energia immagazzinata nell'oggetto e legata al suo stato di moto (velocità v) e alla sua massa m. Per definizione, l'energia cinetica è definita come:

definizione energia cinetica

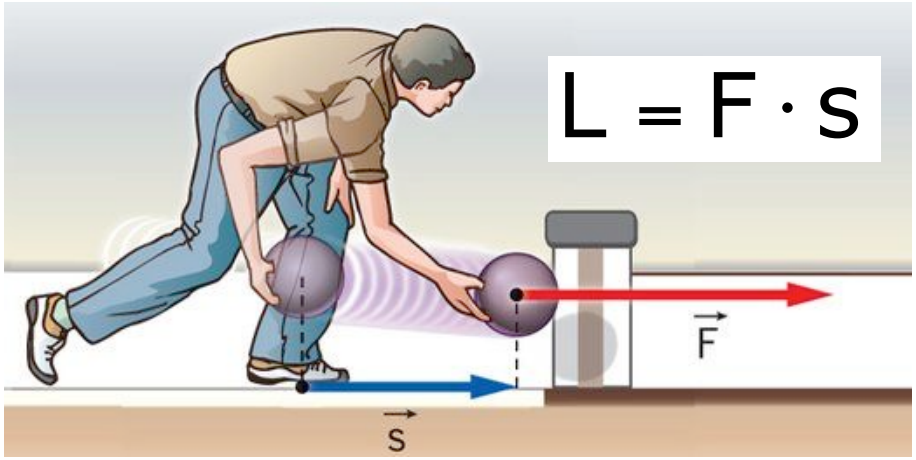


Avendo sostenuto che l'energia ed il lavoro sono due concetti equivalenti e che il lavoro è energia in transito, allora possiamo affermare che:

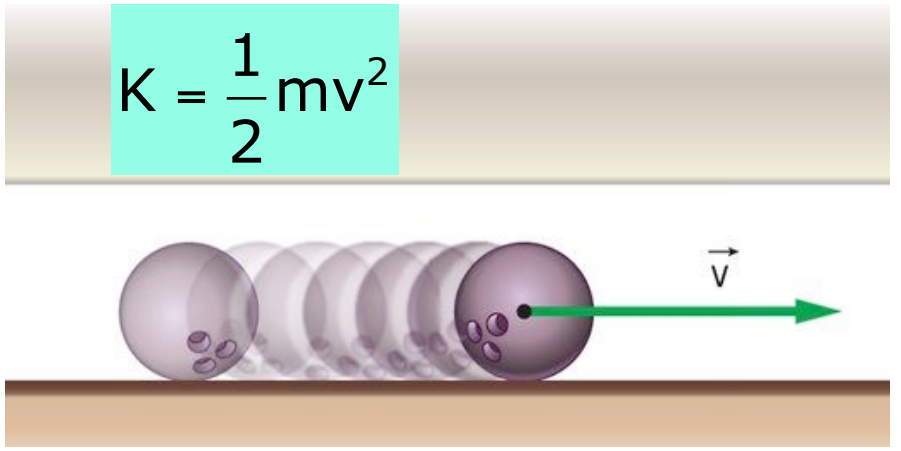
L'energia cinetica K è uguale al lavoro che una forza deve compiere per portare un corpo di massa m, inizialmente fermo, fino alla velocità v:

$$K = L$$

Infatti:



=



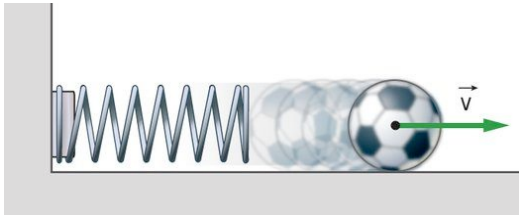
La forza continua ad agire mentre la boccia si sposta con moto rettilineo uniformemente accelerato per un tratto s.

Dopo che la forza ha smesso di agire, la boccia si muove di moto rettilineo uniforme con velocità costante v.

In modo analogo si dimostra che:

L'energia cinetica è anche uguale al lavoro che un corpo di massa m, in moto a velocità v, compie quando viene fermato

La palla ha richiesto un lavoro $L=(1/2)mv^2$ per giungere alla velocità v partendo da ferma.



Muovendosi a velocità costante per il primo principio della dinamica, ha «portato con sé» la capacità di compiere un lavoro.

La palla ha «restituito» il lavoro quando è stata fermata dall'azione di un altro sistema fisico.

In generale, possiamo affermare che se su un corpo in moto con velocità v viene eseguito un lavoro, la sua velocità cambia e quindi anche la sua energia cinetica. Vale quindi il seguente teorema:

TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

Il lavoro compiuto da una forza su un corpo è uguale alla variazione dell'energia cinetica subita dal corpo:

$$L = \Delta K = K_{finale} - K_{iniziale}$$

Esempio

Un'auto di massa 1000 kg accelera da 0 a 100 km/h in 6s. Calcolare la potenza, trascurando gli attriti.

In base al teorema dell'energia cinetica sappiamo che il lavoro è legato alla variazione dell'energia cinetica dalla relazione:

$$L = \Delta E_C = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Sostituendo i dati forniti dal problema e tenendo conto che l'auto parte da ferma ($v_1 = 0$), operando la conversione 100 km/h ≅ 28 m/s, otteniamo:

$$L = \Delta E_C = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1000\ \text{kg} \cdot (28\ \text{m/s})^2 = 392\,000\ \text{J}$$

e quindi:

$$L = 3{,}92 \cdot 10^5\ \text{J}$$

La potenza del motore vale perciò:

$$P = \frac{L}{\Delta t} = \frac{3{,}92 \cdot 10^5\ \text{J}}{6\ \text{s}} \cong 65\,330\ \text{W} \cong 65\ \text{kW}$$

La potenza che l'auto sviluppa per raggiungere quella velocità è in realtà maggiore, perché il motore, oltre ad accelerare l'auto, deve vincere anche gli attriti, sia interni (motore, meccanismi di trasmissione, ...) sia esterni (asfalto e aria).

Esempio

Calcolare l'intensità media delle forze di attrito dei freni di un'auto durante una frenata, sapendo che la massa dell'auto è di 1000 kg, la sua velocità iniziale 30 m/s e lo spazio di frenata 150 m.

■ **LEGGI ED EQUAZIONI**

Dalla relazione:

$$L = \Delta E_C = E_{CF} - E_{CI} = \frac{1}{2} m v_F^2 - \frac{1}{2} m v_I^2$$

conoscendo la massa, la velocità iniziale e quella finale dell'auto si può ricavare il lavoro. Quindi, dalla relazione:

$$L = \vec{F} \cdot \vec{s} = F\, s \cos\alpha$$

conoscendo il lavoro, lo spostamento e l'angolo (uguale a 180°, perché la forza di attrito è parallela allo spostamento, ma di verso opposto) si ottiene l'intensità della forza.

■ **SOLUZIONE ALGEBRICA**

Le equazioni che permettono la soluzione del problema sono dunque:

$$L = \frac{1}{2} m v_F^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \qquad \text{e} \qquad F = \frac{L}{s \cos\alpha}$$

dove F rappresenta l'intensità della forza di attrito.

■ **SOLUZIONE NUMERICA**

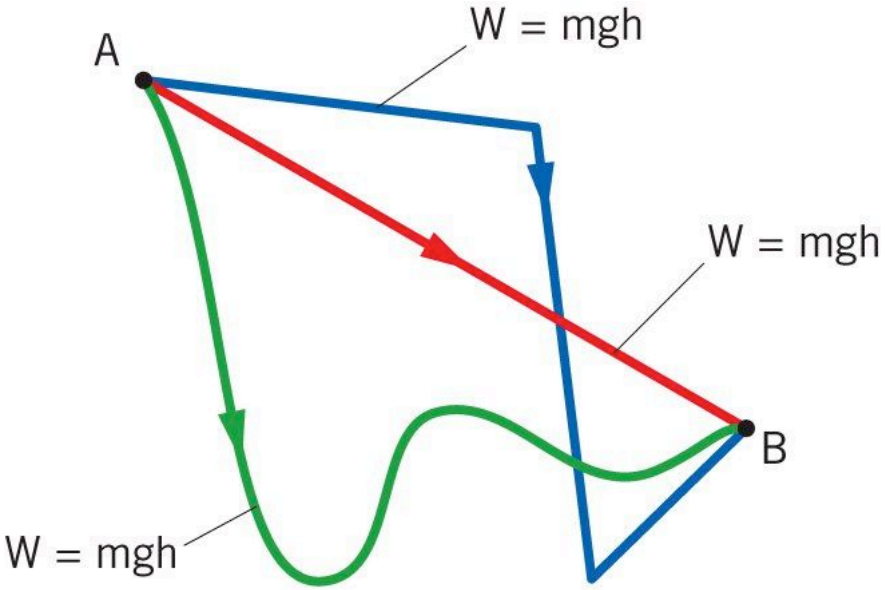
Sostituendo i dati forniti dal problema si ottiene:

$$L = \frac{1}{2} m v_F^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = -\frac{1}{2} \cdot 1000\ \text{kg} \cdot (30\ \text{m/s})^2 = -450\,000$$

e quindi:

$$F = \frac{L}{s \cos\alpha} = \frac{-450\,000\ \text{J}}{150\ \text{m} \cdot (-1)} = 3000\ \text{N}$$

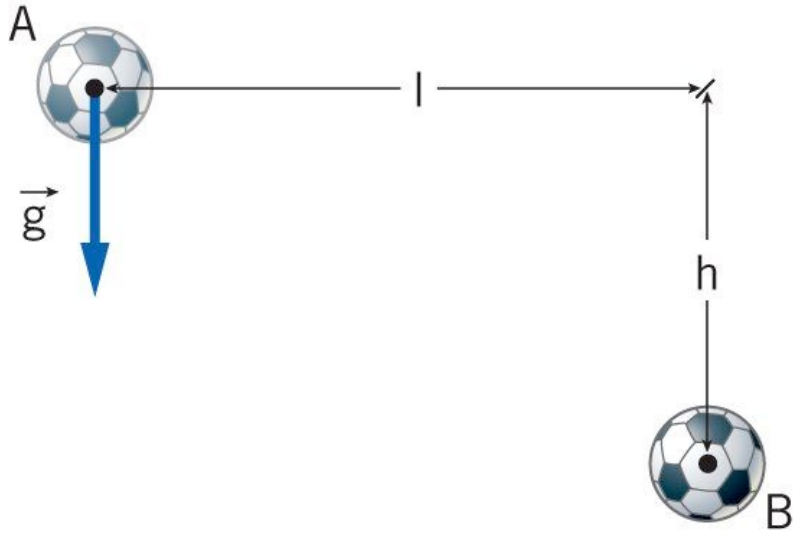
FORZE CONSERVATIVE E NON CONSERVATIVE



Una forza si dice conservativa se il lavoro che essa fa su un corpo, nel spostarlo da un punto A a un punto B, dipende soltanto dagli estremi A e B, ma non dal particolare percorso seguito durante lo spostamento.

Un esempio di forza conservativa è la forza-peso (e anche la forza elastica). Infatti:

Consideriamo una palla di massa m che, soggetta alla forza di gravità, si sposta da un punto di partenza A a un punto di arrivo B spostato di *l* a destra di A e di *h* sotto di esso.



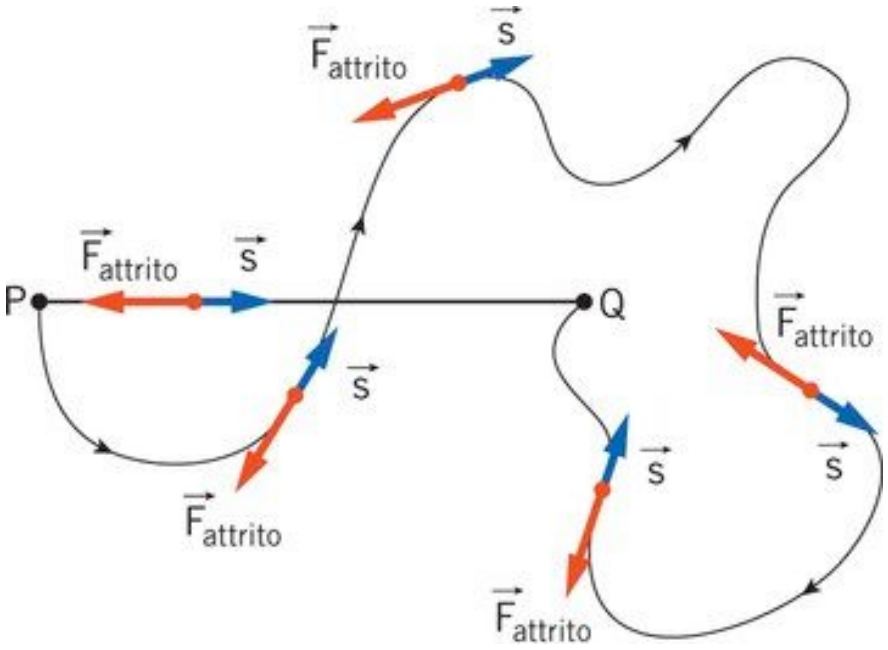
Calcoliamo il lavoro fatto dalla forza-peso F_P lungo *l* e lungo *h*:

$$L_l = F_P \cdot l \cdot \cos\alpha = 0 \quad in\ quanto\ \alpha = 90°\ e\ quindi\ \cos 90° = 0$$

$$L_h = F_P \cdot h \cdot \cos\alpha = F_P \cdot h \quad in\ quanto\ \alpha = 0°\ e\ quindi\ \cos 0° = 1$$

Quindi il lavoro dipende solo dal dislivello h e non dal particolare percorso che unisce A con B.

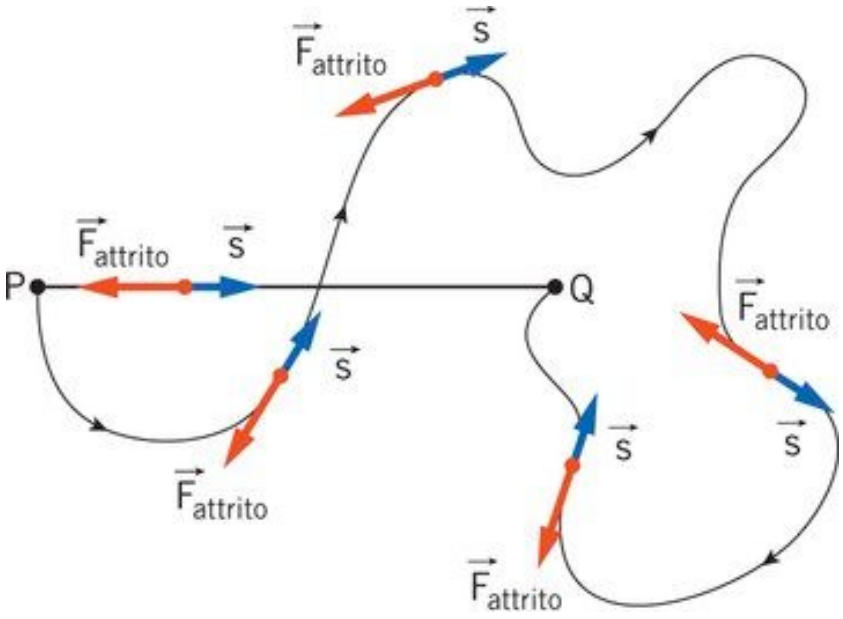
Un esempio di forza non conservativa è la forza di attrito. Infatti:



Consideriamo il lavoro compiuto dalla forza di attrito su un corpo dal punto P fino a un punto Q.

La forza di attrito è diretta in senso contrario allo spostamento e, quindi, compie un lavoro negativo.

Il valore assoluto di tale lavoro è tanto più grande quanto più lungo risulta il percorso seguito per passare da P e Q. Infatti, ogni tratto di cammino in più aggiunge un nuovo termine negativo al lavoro totale.



Quindi, il valore assoluto del lavoro compiuto dalla forza di attrito durante lo spostamento rettilineo da P a Q è decisamente minore del valore assoluto del lavoro compiuto, sempre dalla forza di attrito, nel corso dello spostamento curvilineo.

Conclusione: il lavoro prodotto dalle forze non conservative dipende dal percorso seguito durante lo spostamento

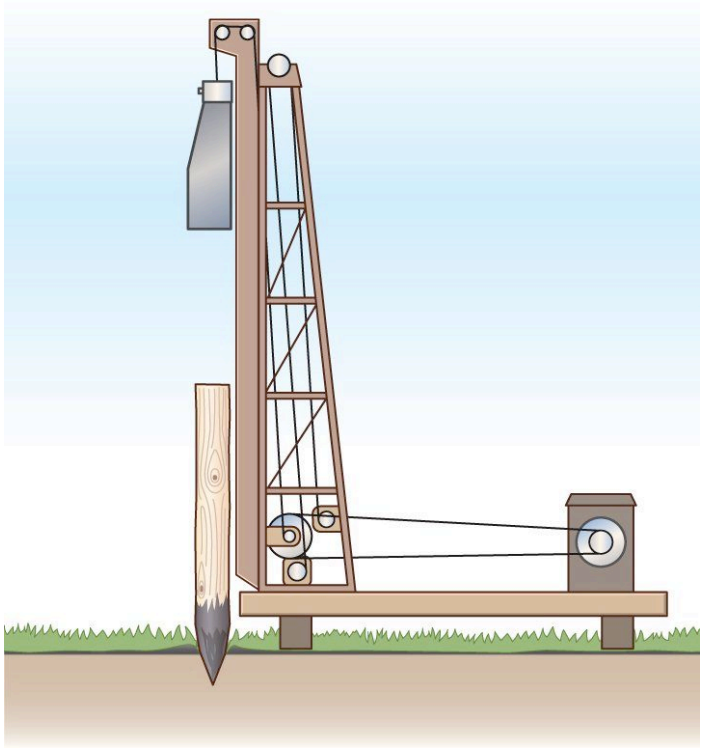
ENERGIA POTENZIALE

Energia potenziale gravitazionale

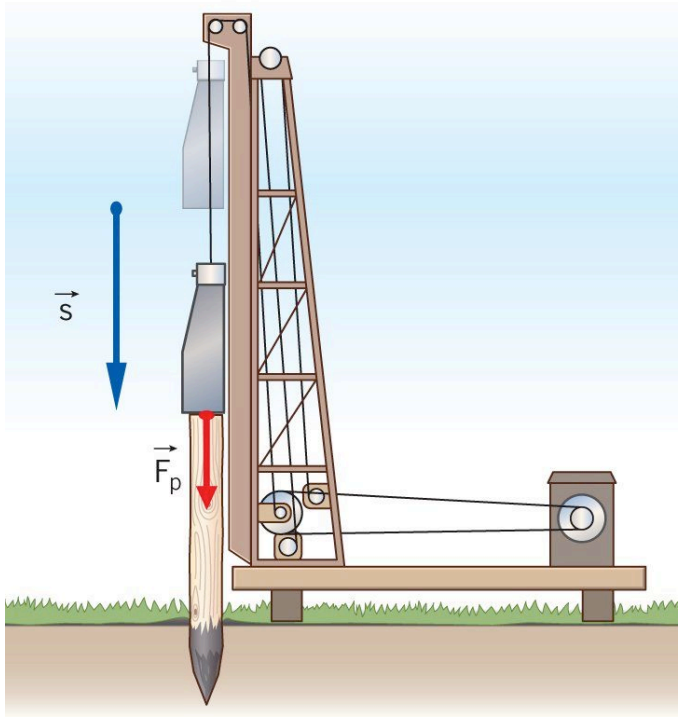
Un corpo che si trova in alto è in grado di compiere lavoro quando scende. Quindi un oggetto fermo può possedere un'energia per il semplice fatto di occupare una certa posizione rispetto al suolo.

Questo tipo di energia è detta **energia potenziale gravitazionale**, perché nasce dall'attrazione gravitazionale della Terra.

Si può definire l'energia potenziale perché la forza-peso è conservativa.



Un grande maglio è sollevato fino a una certa altezza e poi lasciato andare.



Tornando a terra, il maglio è in grado di compiere un lavoro, cioè conficcare un palo nel terreno.

Il lavoro fatto nel conficcare il palo è uguale all'energia cinetica che il maglio ha acquisito a fine corsa.

$$L = K$$

A sua volta questa energia cinetica è uguale al lavoro che la forza-peso compie sul maglio durante la caduta.

$$K = L$$

Calcoliamo il lavoro della forza-peso e quindi il lavoro di conficcamento del palo:

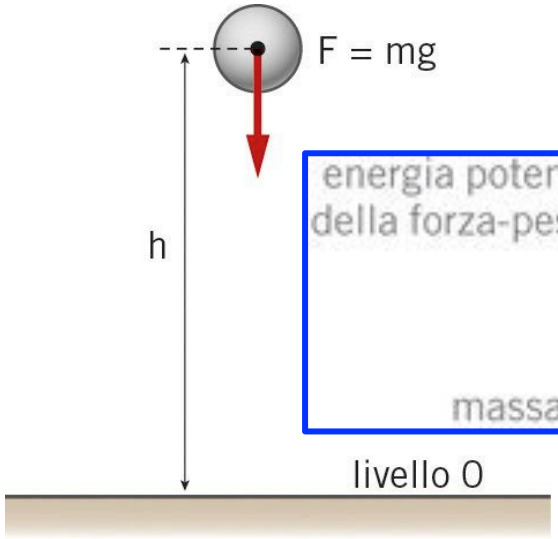
$$\boxed{L = F_P \cdot s = mgh}$$

Il lavoro che il maglio compie per conficcare il palo è direttamente proporzionale alla sua massa e all'altezza da cui è partito.

Possiamo allora dire che, quando il maglio era fermo all'altezza h rispetto alla testa del palo, aveva una capacità di compiere lavoro uguale a *mgh*.

definizione energia potenziale gravitazionale

L'energia potenziale gravitazionale di un corpo è uguale al lavoro compiuto dalla forza-peso quando il corpo stesso si sposta dalla posizione iniziale a quella di riferimento (livello di zero).



energia potenziale della forza-peso (J) — accelerazione di gravità (m/s^2)

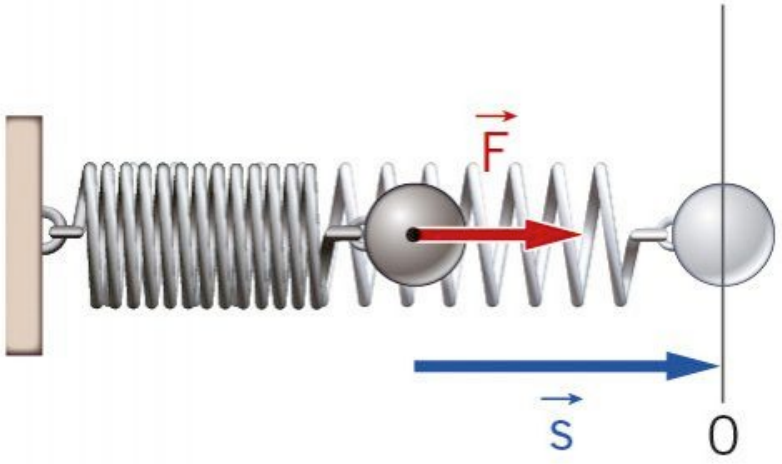
$$U = mgh$$

massa (kg) — altezza (m)

[Joule : J]

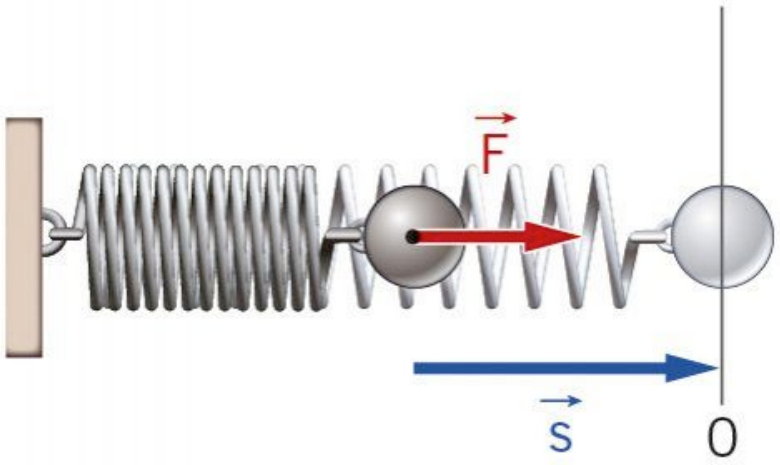
Energia potenziale elastica

Data una molla compressa o allungata, la forza elastica è in grado di compiere lavoro quando viene lasciata andare.



Poiché la forza elastica è una forza conservativa, possiamo dire che anche una molla deformata possiede un'**energia potenziale elastica**, esattamente come un oggetto sollevato rispetto alla quota di riferimento possiede un'energia potenziale gravitazionale.

Scegliamo lo zero dell'energia potenziale della molla nella situazione in cui essa è a riposo. In questo modo possiamo definire l'energia potenziale nel seguente modo:



definizione energia potenziale elastica

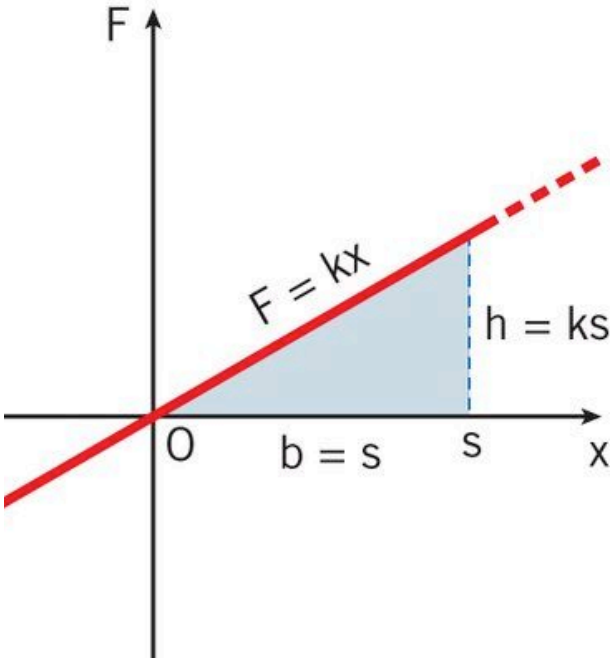
L'energia potenziale elastica di una molla deformata è uguale al lavoro compiuto dalla forza elastica quando la molla si riporta nella sua posizione di riposo (livello di zero).

energia potenziale elastica (J) — costante elastica (N/m)

$$U_e = \frac{1}{2}ks^2$$

spostamento (m)

Infatti, ricordando che il lavoro è dato dall'area sottesa dalla funzione forza, si ottiene:



La forza elastica $F=kx$ è rappresentata da una retta passante per l'origine, e l'area sottesa è un triangolo. Per cui il lavoro compiuto dalla forza elastica è dato dall'area del triangolo:

$$L = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1}{2} k s^2$$

Questo lavoro non è altro che l'energia potenziale elastica della molla deformata con uno spostamento s.

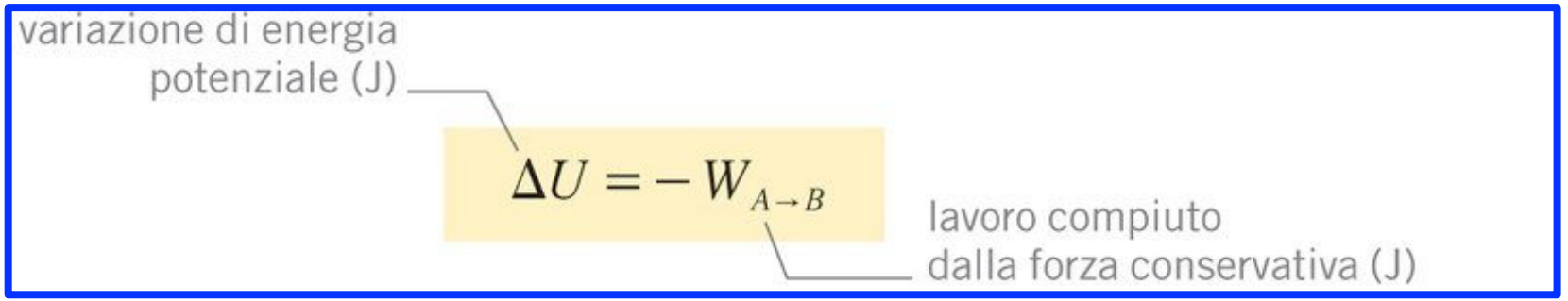
Definizione generale energia potenziale

L'energia potenziale può essere introdotta per tutte le forze conservative.

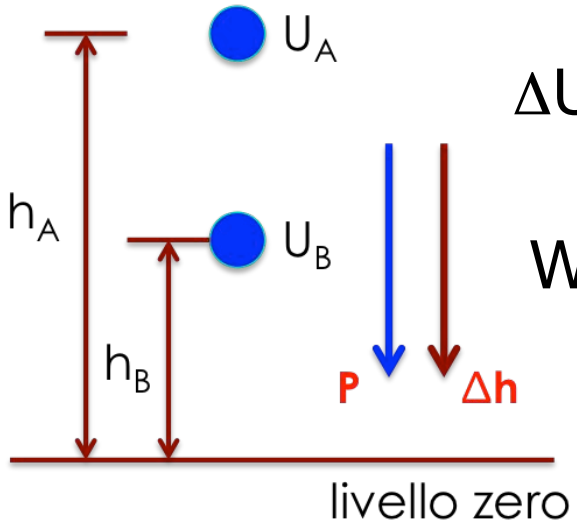
Consideriamo un sistema fisico che è soggetto alla forza conservativa **F**. Esso si trova nella condizione iniziale *A* e passa ora nella condizione finale *B*.

definizione energia potenziale

Definiamo la variazione di energia potenziale $\Delta U = U - U_A$ come l'opposto del lavoro fatto dalla forza **F** durante il passaggio dalla posizione A alla posizione B:

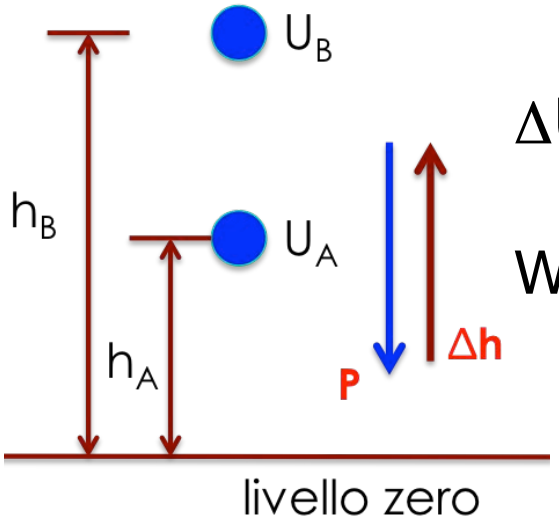


Infatti, consideriamo le seguenti situazioni:



$$\Delta U = U_B - U_A = mg(h_B - h_A) \xrightarrow{h_B<h_A} \Delta U < 0$$

$$W_{A\to B} = P \cdot \Delta h \cdot \cos 0° \xrightarrow{\cos 0°=1} W_{A\to B} > 0$$



$$\Delta U = U_B - U_A = mg(h_B - h_A) \xrightarrow{h_B<h_A} \Delta U > 0$$

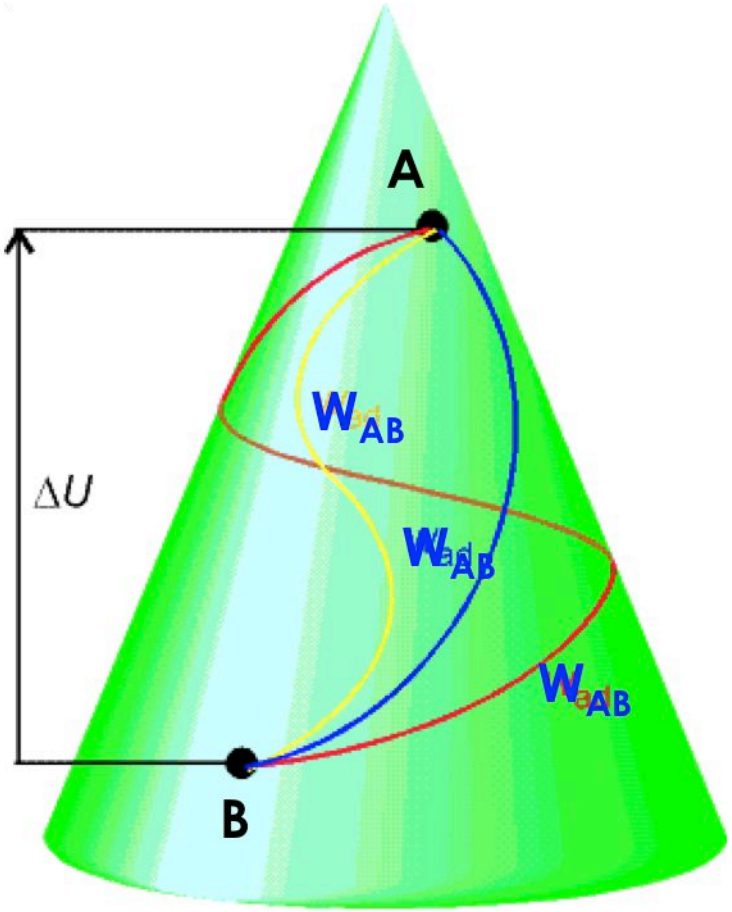
$$W_{A\to B} = P \cdot \Delta h \cdot \cos 180° \xrightarrow{\cos 180°=-1} W_{A\to B} < 0$$

In entrambi i casi:

$$\Delta U = - W_{A\to B}$$

Generalizzando, l'energia potenziale fa parte delle cosiddette **funzioni di stato.**

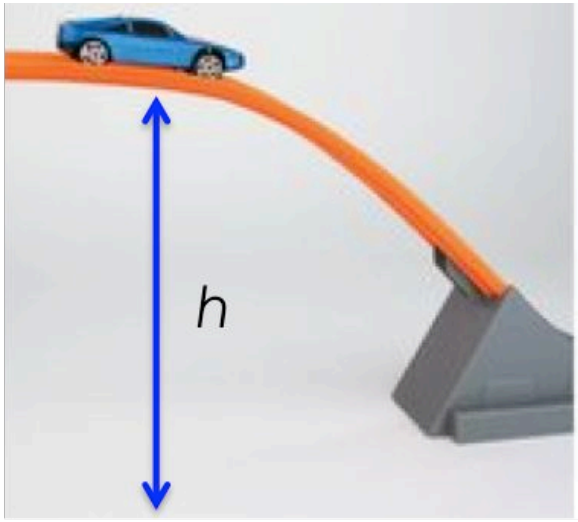
Una ***FUNZIONE DI STATO*** è una grandezza fisica dipendente soltanto dalle variabili (la posizione nel nostro caso) che servono per descrivere gli stati A e B del sistema fisico, e non dal processo (la traiettoria nel nostro caso) attraverso il quale il sistema passa da A a B.

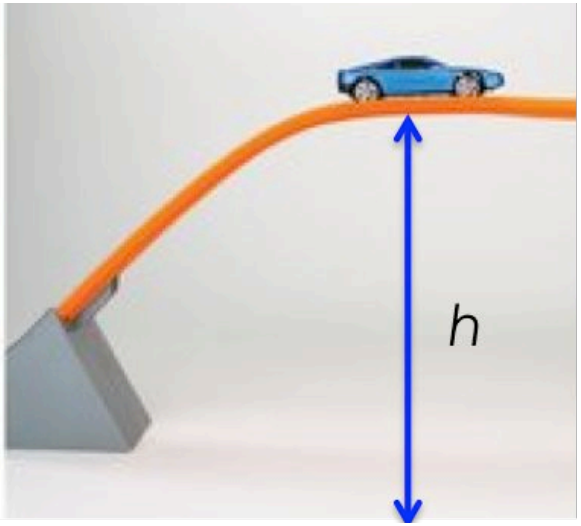


$$\Delta U = U_B - U_A$$

PRINCIPIO CONSERVAZIONE ENERGIA MECCANICA

Realizziamo un esperimento con un carrellino che si muova sotto l'azione di sole forze conservative, come la forza-peso, quindi senza attrito. Esso è lasciato andare lungo il binario a partire da una determinata quota *h* e, dopo un certo tempo, risale dalla parte opposta raggiungendo la stessa quota.





$$K = 0 \qquad K = \frac{1}{2}mv^2 \qquad K = 0$$
$$U = mgh = U = 0 = U = mgh$$

Le variazioni di energia cinetica e di energia potenziale non sono casuali: se le forze in gioco sono conservative, durante il moto l'energia cinetica e quella potenziale del carrello variano, ma la loro somma rimane costante.

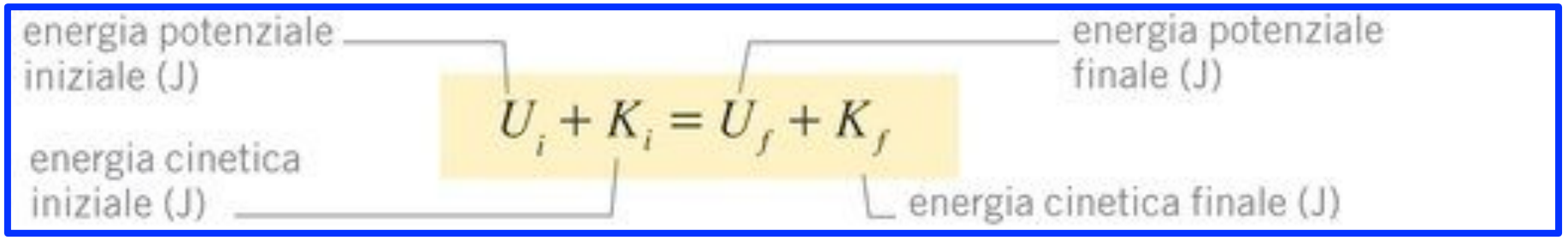
Questa proprietà così importante suggerisce di definire una nuova grandezza fisica:

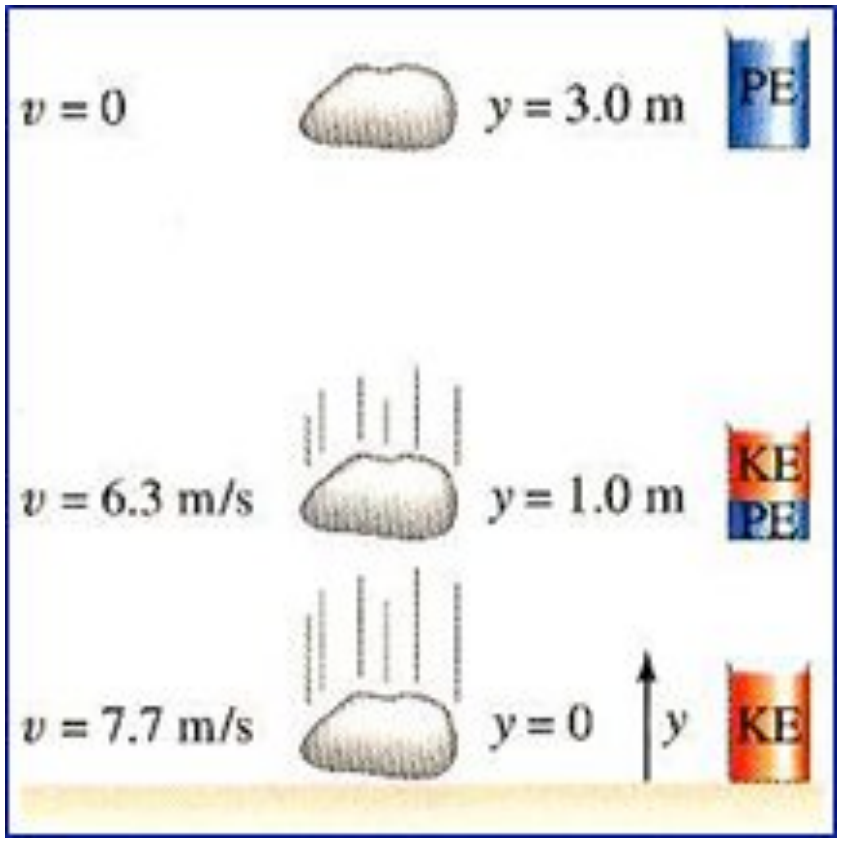
ENERGIA MECCANICA = ENERGIA CINETICA + ENERGIA POTENZIALE

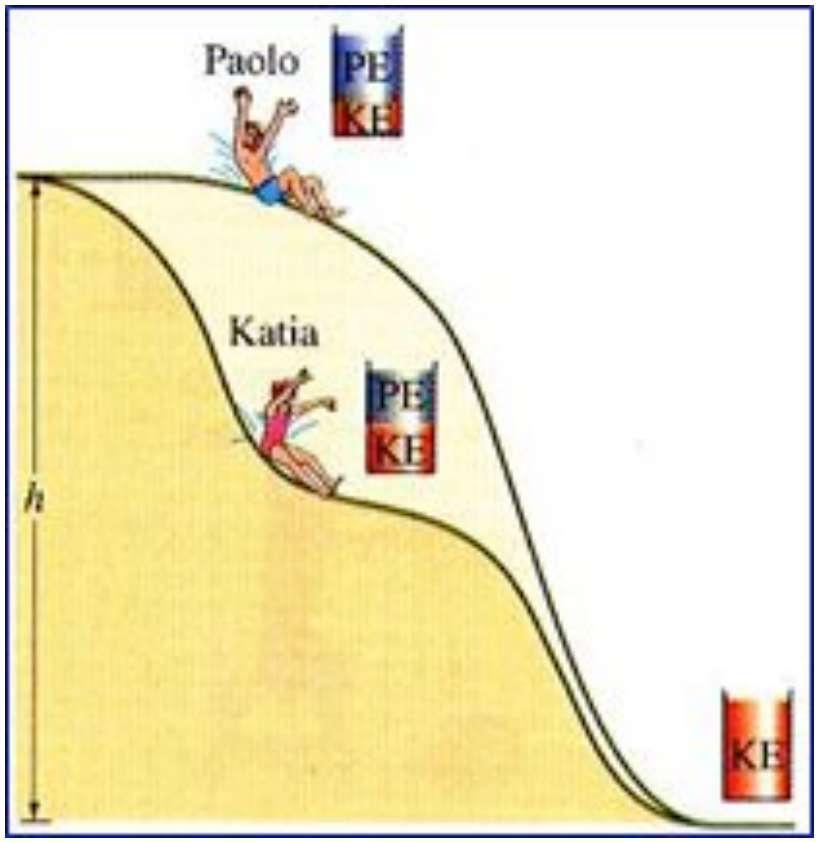
e il seguente principio:

PRINCIPIO CONSERVAZIONE ENERGIA MECCANICA

In un sistema isolato (sistema su cui non agiscono forze esterne) in cui sono presenti soltanto forze conservative l'energia meccanica si conserva, ossia la somma dell'energia potenziale e cinetica iniziale è uguale alla somma dell'energia cinetica e potenziale finale:







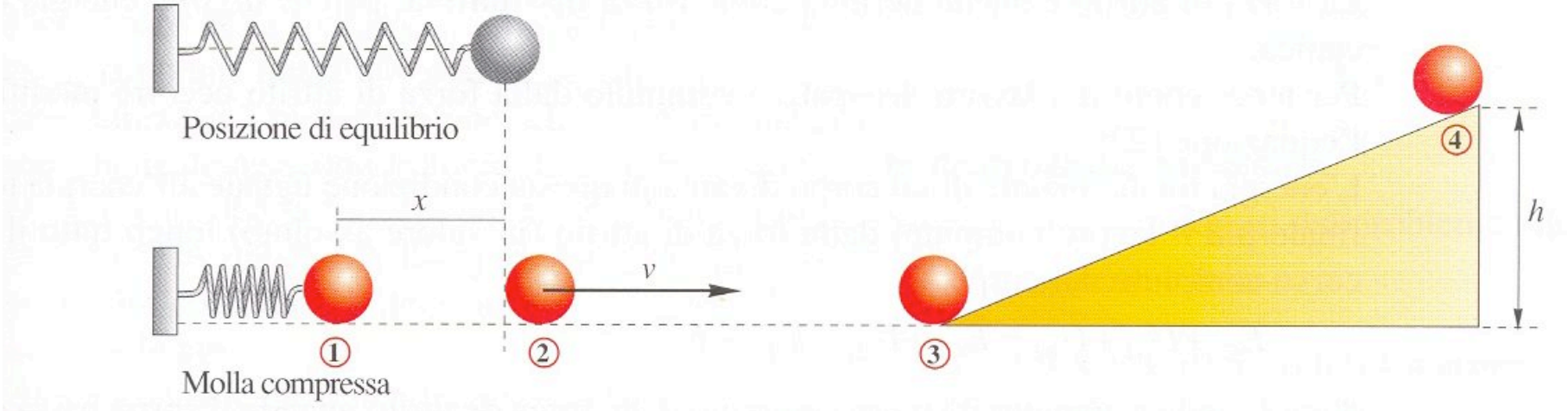
$$U_i + K_i = U_f + K_f$$

- U_i: energia potenziale iniziale (J)
- K_i: energia cinetica iniziale (J)
- U_f: energia potenziale finale (J)
- K_f: energia cinetica finale (J)

Esempio

Una molla compressa di 10 cm, tornando alla sua posizione di equilibrio, lancia lungo un piano orizzontale senza attrito, una pallina di massa m=200g. Successivamente la pallina, risalendo lungo un piano inclinato senza attrito, raggiunge l'altezza di 20 cm. Calcolare la costante elastica della molla.

MODELLO FISICO



Possiamo distinguere due diverse *trasformazioni di energia*:

- nella prima l'energia potenziale elastica della molla compressa (1) si trasforma in energia cinetica della pallina che si muove lungo il piano orizzontale (2) con velocità v;
- nella seconda l'energia cinetica della pallina si trasforma, risalendo il piano inclinato (3), in energia potenziale gravitazionale (4).

■ LEGGI ED EQUAZIONI

In base alla legge generale di conservazione dell'energia meccanica possiamo scrivere:

$$E_C + U_G + U_E = \text{costante}$$

e applicarla separatamente alle due trasformazioni di energia.

Poiché tuttavia il problema ci chiede solamente di determinare la costante elastica della molla (e quindi l'energia potenziale elastica iniziale) conoscendo l'altezza finale raggiunta dalla pallina (e quindi l'energia potenziale gravitazionale finale) possiamo scrivere semplicemente:

$$\frac{1}{2}kx^2 = mgh$$

poiché inizialmente l'energia è solamente elastica, mentre alla fine è solo gravitazionale.

■ RISOLUZIONE ALGEBRICA

Dalla precedente equazione si può ricavare la costante elastica k:

$$k = \frac{2mgh}{x^2}$$

■ RISOLUZIONE NUMERICA

Sostituendo i dati forniti dal problema si ottiene:

$$k = \frac{2mgh}{x^2} = \frac{2 \cdot 0{,}2\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 0{,}2\ \text{m}}{(0{,}1\ \text{m})^2} \cong 78\ \text{N/m}$$

PRINCIPIO CONSERVAZIONE ENERGIA TOTALE

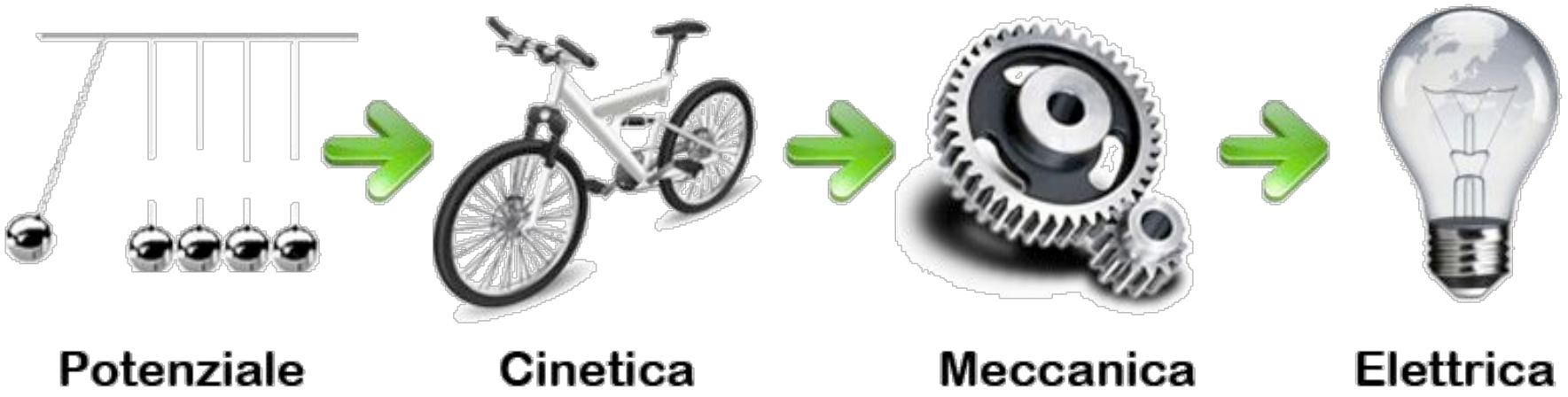
Durante una frenata, tutta l'energia cinetica si riduce a zero, ma non c'è nessuna energia potenziale che aumenta, in quanto le forze in gioco (forza di attrito) sono non conservative: a causa dell'attrito dei freni, l'energia meccanica del sistema non si conserva, ma si dissipa.

Però, se potessimo misurare con precisione la temperatura dei freni, delle ruote e dell'aria prima e dopo la frenata vedremmo che essa è aumentata, anche se di pochissimo: ciò significa che l'energia meccanica non è sparita, ma è stata trasformata in un'altra forma di energia (calore), pari proprio a quella meccanica.

Allora possiamo affermare il seguente principio:

PRINCIPIO CONSERVAZIONE ENERGIA TOTALE

In un sistema isolato l'energia totale si conserva.



L'energia si trasforma